Les Maths pas à pas

Les fonctions rationnelles.

1. Généralités.

Les fonctions rationnelles sont, par analogie avec les fractions rationnelles, des fonctions de division de polynômes par exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 7}{x^8 + 7x^5 + 5x - 96}$$

est une fonction rationnelle.
On notera les fonctions rationnelles sous la forme :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Les valeurs de x pour lesquels Q s'annulent s'appellent les pôles de la fonction.

2. Méthode de la décomposition en éléments simples.

La décomposition en éléments simples (DES) est une méthode puissante pour simplifier les fonctions rationnelles et ainsi calculer leurs primitives.
Ici nous nous limiterons aux fractions rationnelles tel que $P(x) = 1$ et $Q(x)$ est un polynôme qui a un nombre de racine égal à son degré.
Exemple :

$$Q(x) = x^3 + 4x^2 - 19x + 14 = (x-2)\,(x+7)\,(x-1)$$

On décompose de la manière suivante :
On cherche à transformer la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14} = \frac{1}{(x-2)(x+7)(x-1)}$$

en

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+7} + \frac{c}{x-1}$$

Le but est de trouver les coefficients a, b et c.
Pour cela on multiplie de chaque côté par $x - 2$:

$$\frac{1(x-2)}{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+7)(\mathrm{x}-1)} = \frac{a}{1} + \frac{b(x-2)}{x+7} + \frac{c(x-2)}{x-1}$$

Et on pose $x = 2$ (on ne divise pas par 0 et les coefficients b et c s'éliminent …).
On obtient immédiatement :

$$\frac{1}{(2+7)(2-1)} = \frac{1}{9} = a$$

Pour le coefficient b on multiplie des deux côtés par $x + 7$ et on pose $x = -7$
On obtient immédiatement :

$$b = \frac{1}{72}$$

Pour le coefficient c on multiplie des deux côtés par $x - 1$ et on pose $x = 1$
On obtient immédiatement :

$$c = -\frac{1}{8}$$

3. Limites

Pour connaitre la limite d'une fraction rationnelle, on prend les termes dominants de chaque polynôme, on les divise et on en déduit la limite facilement.